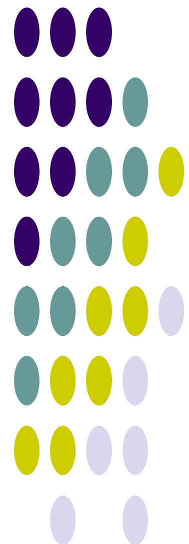
UNIVERSITE SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH
FACULTE DES SCIENCES DHAR MAHRAZ
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE

Module S3

SMP & SMC

Probabilités



A.U 2005-06

Pr : Jarrar Oulidi .A

www. fsdmfes.ac.ma

Chapitre 1

Eléments du calcul des probabilités

1. Introduction

La théorie (ou le calcul) des probabilités est une branche des mathématiques qui permet de modéliser les phénomènes où le hasard intervient, initialement développée à propos des jeux de hasard, puis progressivement étendue à l'ensemble des sciences expérimentales, dont la physique, la biologie, l'économie, la géographie, les sciences humaines, la médecine, etc.

Cette théorie permet de construire des modèles de ces phénomènes et permet le calcul : c'est à partir d'un modèle probabiliste d'un jeu de hasard comme le jeu de dés que l'on peut prédire les fréquences d'apparition d'événements comme le nombre de fois que l'on obtient une valeur paire en jetant un dé un grand nombre de fois.

Le scientifique est capable, en utilisant les mathématiques, de prédire le comportement d'un modèle donné, c'est par exemple une « loi » de la physique : c'est la démarche déductive. A l'inverse, observant des faits expérimentaux il va tenter de dégager des propriétés générales du phénomène observé qu'il va en général représenter sous forme d'un modèle. Toutes les lois de la physique et de la chimie sont des modèles mathématiques les plus généraux possibles des faits expérimentaux : c'est la construction inductive de la théorie. Cette démarche générale va plus loin car le modèle permet de prédire des expériences non réalisées. Si les prédictions ainsi réalisées sont contradictoires avec les résultats expérimentaux alors on pourra avec certitude réfuter le modèle; dans le cas contraire on garde le modèle mais on n'est pas certain qu'il soit « vrai ». Autrement dit, à l'issue d'un tel test on ne peut avoir de certitude que si on a trouvé des éléments permettant de réfuter le modèle. Nous verrons dans la suite que cette approche se transpose exactement dans la démarche statistique, en particulier dans le domaine des tests.

2. Notions de base

a) Evénement

On peut dire que tout ce qui peut se réaliser ou ne peut pas se réaliser, à la suite d'une expérience spontanée ou provoquée parfaitement est un événement.

Exemple 1.1

En jetant un dé

« Obtenir un 6 » est un événement,

« Obtenir un nombre compris entre 1 et 6 » est un événement,

« Obtenir un 7 » est un événement.

b) Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire ou épreuve est un ensemble de conditions précisent caractérisant un processus à la suite duquel l'événement est réalisé ou non.

c) Evénement élémentaire

Il s'agit d'un événement qui ne sera réalisé que par un seul résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple 1.2

En jetant un dé

« Obtenir un 6 » est un événement élémentaire,

« Obtenir un nombre pair » n'est pas un événement élémentaire, car il peut être réalisé par plusieurs résultats de l'expérience aléatoire qui sont : $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$.

d) Ensemble fondamental

L'ensemble fondamental associé à une certaine expérience aléatoire E, est l'ensemble de tous les résultats *"élémentaires"* possibles de E. Cet ensemble fondamental sera toujours noté **Ω**.

Exemple 1.3

Si on jette un dé, tous les résultats possibles sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ensemble fondamental.

Si on lance une pièce de monnaie, tous les résultats possibles sont : pile, face $\Rightarrow \Omega = \{\text{pile, face}\} = \{p, f\}$ ensemble fondamental. Pour simplifier, nous notons p au lieu de pile et f au lieu de face.

Remarque

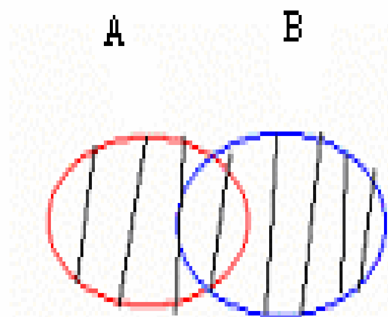
1) Tout événement, élémentaire ou non, peut être considéré comme une partie de Ω.

2) Lorsque Ω est fini ou dénombrable, l'ensemble des événements et l'ensemble des parties de Ω, c'est-à-dire *P* (Ω).

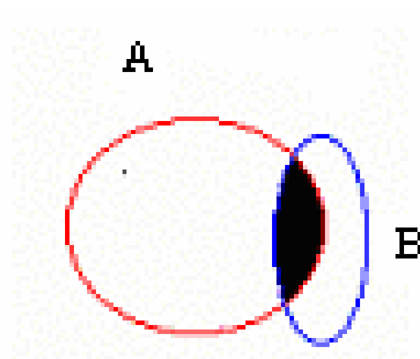
3. Logique des événements

Soit Ω l'ensemble fondamental associé à une certaine expérience aléatoire E.

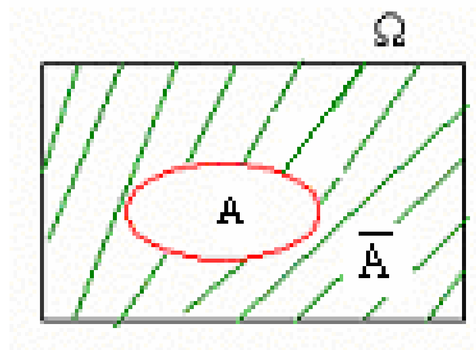
Notions	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
$\omega \in \Omega$	Point de Ω	Résultat possible, épreuve ou événement
$A \subset \Omega$	Sous-ensemble de Ω ou partie de Ω	Evénement
$\omega \in A$	ω appartient à A	A est réalisé si ω est le résultat de l'expérience
$A \subset B$	A est contenu dans B	A implique B
$A \cup B$	Réunion de A et de B	A ou B (le ou n'est pas exclusif)
$A \cap B$	Intersection de A et B	A et B
$\overline{A}$ ou A^c	Complémentaire de A	Contraire de A par rapport à Ω
$\emptyset$	Ensemble vide	Evénement impossible
Ω	Ensemble plein	Evénement certain
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles ou mutuellement exclusifs

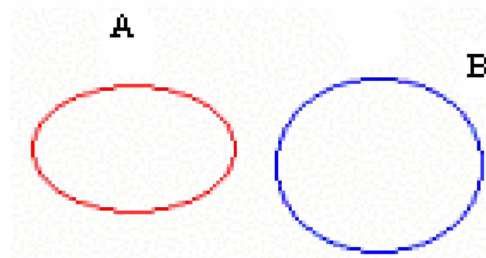


$A \cup B$

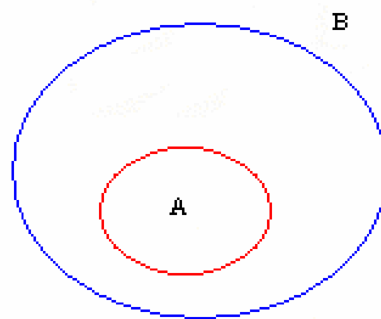


$A \cap B$





$A \cap B = \emptyset$



$A \subset B$

Exemple 1.4

L'expérience aléatoire consiste à tirer une carte dans un jeu de 32 cartes.

A = « tirer un as »,

B = « tirer un roi »,

C = « tirer un cœur »,

A U C = « tirer un as ou un coeur »,

$A \cap C$ = « tirer un as de coeur »,

$A \cap B$ = « tirer un as et un roi », c'est impossible car on ne peut pas tirer un as et un roi avec une seule carte.

$\overline{A}$ = « tirer une carte autre que as ».

Soit Ω l'ensemble des événements élémentaires (ensemble fondamental ou univers).
On arrive au point essentiel de définir la probabilité d'un événement $A \subset \Omega$, qui doit mesurer la chance que l'événement A a de se réaliser lorsqu'on effectue une épreuve.
La complexité de la définition dépend de celle de Ω : fini, infini dénombrable, infini non dénombrable.

4. Définition de la probabilité dans le cas Ω fini

Définition 1.1

Soit Ω fini, dont les événements élémentaires sont équiprobables (chaque événement a autant de chance d'apparaître que n'importe quel autre événement).

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Attention à l'hypothèse d'équiprobabilité.

Exemple 1.5

Une urne contient une boule blanche (1B) et une boule noire (1N).
On fait 2 tirages avec remise. Quelle est la probabilité d'avoir 2 Noires ?

On a $\Omega = \{(N, N); (B, B); (B, N); (N, B)\}$, card $\Omega = 4$.
A : "avoir 2 Noires" c'est $A = \{(N, N)\}$.
On a $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = 1/4$

Remarque
Si on ne tient pas compte de l'ordre et que l'on écrit $\Omega = \{\{N, N\}, \{B, B\}, \{B, N\}\}$, les événements élémentaires n'étant pas équiprobables, on n'a pas $P(A) = \frac{\text{card} A}{\text{card } \Omega}$

Erreur : on aurait P (A) = 1/3 !!

Exemple 1.6

Soit une urne contenant 4 boules 1 rouge (1R); 1 verte (1V); 1 jaune (1J) et 1 blanche (1B).
On effectue 3 tirages avec remises. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 fois la boule blanche ?

On a card $\Omega = 4 \times 4 \times 4 = 64$.
Soit A : "2 fois la blanche exactement".
A = {(BBN), (BBV), (BBJ), (BRB), (BVB), (BJB), (RBB), (VBB), (JBB)}.
Ainsi card A = 9.
Donc $P(A) = \frac{9}{64}$

Exemple 1.7

Soit une urne contenant 5 boules 2 vertes (2V) et 3 blanches (3B).

1) On effectue 2 tirages sans remise.
a) Quelle est la probabilité d'avoir 2 vertes exactement ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir 2 blanches exactement ?
c) Quelle est la probabilité d'avoir 1V et 1B ?

2) Même question avec tirage avec remise.

1) On ne peut pas appliquer la définition car les événements ne sont pas équiprobables.
2) On écrit $\Omega = \{(B_1 B_2), (B_1 B_2) (B_1 B_2) (B_1 B_2) (B_1 B_2)\ldots\}$
a) P (avoir 2 vertes exactement) $= \frac{2}{5}\,\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$
b) P (avoir 2 blanches exactement) $= \frac{3}{5}\,\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$
c) P (avoir 1 verte et 1 blanche) $= \frac{2}{5}\,\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\,\frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$
2) On a card $\Omega = 5^2 = 25$, ainsi
a) P (avoir 2 vertes exactement) $= \frac{2\text{x}2}{25} = \frac{4}{25}$
b) P (avoir 2 blanches exactement) $= \frac{3\text{x}3}{25} = \frac{9}{25}$
c) P (avoir 1 verte et 1 blanche) $= \frac{2\text{x}3\text{x}2}{25} = \frac{12}{25}$

Propriétés

$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \ \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega)$.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \ \forall\, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

A démontrer en utilisant les propriétés du cardinal.

5. Probabilités : Définition axiomatique

5.1. Introduction

Si Ω est infini, la définition précédente devient caduque. Les fondements de la probabilité mathématique sont dus à Kolmogorov (1933).

Considérons l'expérience aléatoire : on tire au hasard sur une cible plane C. on suppose que chaque coup atteint la cible. Le résultat de chaque tir peut être représenté par le point d'impact M, Ω est ici l'ensemble des points de C, il est donc infini. Soit A une partie de Ω.

Notons A = l'événement '' l'impact est dans A''.
Intuitivement : si le tir se fait au hasard, on a : $P(A) = \frac{\text{aire}(A)}{\text{aire}(C)}$,

mais cette formule n'a de sens que si l'on peut définir l'aire de A. Or on peut démontrer qu'il existe des parties de C dont on ne peut pas définir l'aire (par exemple si A = un point, aire(A) = 0, mais P (touché un point) ≠ 0). On n'est donc amené à généraliser la notion d'espace probabilisable.

5.2. Tribu (ou σ-algèbre)

Définition 1.2

Soit Ω un ensemble fondamental. On appelle tribu ou σ-algèbre, tout ensemble $\mathcal{A}$ tel que :

1) $\Omega \in \mathcal{A}$.,
2) $\forall A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3) pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ (finie ou infinie dénombrable) de A, $\cup A_i \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

Exemple 1.8

$\{\emptyset, \mathcal{A}\}$ est une tribu, appelée tribu triviale.

Soit A ½ Ω, alors $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu, appelée tribu engendrée par A, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant A.

Remarque

Lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, on considère toujours $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Théorème 1.3

Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- $\forall A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ sont des éléments de $\mathcal{A}$
- $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{A}$, finie ou dénombrable, on a $\cap A_i \in \mathcal{A}$.

5.3. Système complet d'événements

Définition 1.4

Soit $\mathcal{A}$ une tribu de Ω. On appelle système complet d'événements de Ω, toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ telle que :

1) $\forall i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$
2) $\cup A_i = \Omega$
3) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall (i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$.

Exemple 1.9

Si $A \in \mathcal{A}$, $\{A, \overline{A}\}$ est un système complet

Exemple 1.10

On jette un dé cubique : les résultats sont 1, 2, …, 6

$A = \{1,3, 5\}$, $B = \{2\}$, $C = \{4, 6\}$
$\{A, B, C\}$ est un système complet.

5.4. Espace probabilisé

Définition 1.5

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisé. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$P : \mathcal{A} \longmapsto [0 , 1]$$
$$A \longmapsto P (A)$$

Vérifiant les axiomes :

1) $P (\Omega) = 1$
2) si $(A_i)_{i \in N}$ est une famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints, c'est-à-dire deux à deux incompatibles, alors $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé espace probabilisé et P (A) la probabilité de A.
Remarque

Si P (A) = 0, alors on dit que A est négligeable.
Si P (A) = 1, alors on dit que A est presque sûrement vraie (ou presque sûrement certain).

Théorème 1.6

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soient A et B deux événements de $\mathcal{A}$, on a :

- $P (\emptyset) = 0$
- Si A et B sont incompatibles alors $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
- Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont deux à deux incompatibles alors $P (\cup A_i) = \sum P(A_i)$
- $P (\overline{A}) = 1 – P (A)$
- $P (A - B) = P (A) – P (A\cap B)$
- Si $A \subset B$, alors $P (A) \leq P (B)$
- $P (A\cup B) = P (A) + P (B) – P (A\cap B)$

6. Probabilités conditionnelles - Notion d'indépendance

Les concepts d'indépendance et de probabilité conditionnelle sont définis explicitement par Abraham De Moivre (1667 - 1754). On lui doit également un énoncé clair et précis de la formule des probabilités composées.

Soit Ω un ensemble fondamental lié à une expérience aléatoire E, P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soient A, B deux événements, $A \subset \Omega$, $P(A) > 0$ et $B \subset \Omega$.

Définition 1.7

La probabilité conditionnelle de B sous l'hypothèse A est définie par

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Signification : $P(B \mid A)$ exprime la probabilité de B quand on sait que A est déjà réalisé.
On dit couramment probabilité de B sachant A.

Exemple 1.11

On extrait sans remise 2 cartes d'un jeu de 32. La première carte tirée est un roi. Quelle est la probabilité que la 2ème carte soit aussi un roi ?

$P(B \mid A) = \frac{3}{31}$

Si on veut appliquer la définition, c'est plus compliqué : $P(A) = \frac{4}{32}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{32}\frac{3}{31}$

donc $P(B \mid A) = \frac{4}{32}\frac{3}{31} \times \frac{32}{4} = \frac{3}{31}$

Ainsi en général on utilise la relation dans le sens $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$

Propriété

Formule des probabilités composées

$$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A) \text{ si } P(A) > 0$$
$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \times P(B) \text{ si } P(B) > 0$$

Exemple 1.12

Soit un jeu de 52. On fait 2 tirages avec remise. Probabilité que la première carte soit un roi rouge et la 2ème un roi noir ?

A: "la première carte est un roi rouge" et
B : la deuxième carte un roi noir". On a
$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$, Ainsi $P(A) = \frac{2}{52}$

et $P(B \mid A) = \frac{2}{52} = P(B)$, donc $P(A \cap B) = \frac{2}{52}\frac{2}{52} = P(A)P(B)$

Définition 1.8

Soient $A, B \subset \Omega$, avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$
A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(B \mid A) = P(B) \text{ ou } P(A \mid B) = P(A)$$

Ce qui est le cas dans un tirage avec remise. Le tirage de la première carte n'influe pas sur le tirage de la 2ème. Ce n'est plus le cas pour les tirages sans remise.

Caractérisation

A et B ($P(A) > 0$ $P(B) > 0$) sont indépendants si et seulement si

$$P(A \setminus B) = P(A) \times P(B)$$

Exemple 1.13

Soit une urne contenant 10 boules blanches, 20 boules rouges et 30 boules noires. On tire 2 boules sans remises. Probabilité que la première soit rouge (événement A) et la deuxième soit blanche (événement B) ?

On a $P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$. (Pas d'indépendance)

On a $P(A) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

et $P(B \mid A) = \frac{10}{59}$

Donc $P(A \cap B) = \frac{10}{59} \times \frac{1}{3}$

Même question avec des tirages avec remises

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{10}{60} = \frac{1}{18}$

7. Théorème des probabilités totales et théorème de Bayes

7.1. Système exhaustif

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_k$, k événements associés à une expérience aléatoire E avec Ω l'ensemble fondamental. $B_1, B_2, \ldots, B_k$ constituent un système exhaustif si :

1) $B_i \cap B_j = \emptyset$; $\forall\, i \neq j$ pour i, j = 1, …, k

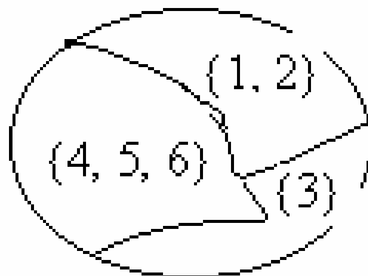
2) $P(B_i) > 0$ $\forall\, i = 1, \ldots, k$

3) $\bigcup_{i=}^{k} B_i = \Omega$

Exemple 1.14

Considérons l'expérience qui consiste à jeter un dé, donc l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Le système $B_1 = \{3\}$ $B_2 = \{1, 2\}$ et $B_k = \{4, 5, 6\}$ est un système exhaustif.



$P(B_i) > 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, 3$

$B_i \cap B_j = \varnothing; \;\; \forall\;\; i \neq j$ pour i, j = 1, 2, 3

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$

7.2. Théorème des probabilités totales

Théorème 1.9

Soient A un événement et $B_1, B_2, \ldots, B_k$ un système exhaustif, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\, P(B_i)$$

Démonstration

$A = \bigcup_{i=1}^{k}(A \cap B_i)$, les événements $(A \cap B_i)$ sont mutuellement exclusifs pour tout i = 1, 2, …, k.

$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k}(A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap B_i).$

De plus $P(A \cap B_i) = P(A/B_i)\, P(B_i)$; car $P(B_i) > 0$, ce qui entraîne

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A/B_i)\, P(B_i).$$

-

7.3. Théorème de Bayes

Ce théorème permet de déterminer la probabilité pour qu'un événement qui est supposé déjà réalisé, soit dû à une cause plutôt qu'à une autre, d'où le nom de théorème des probabilités des causes ce qui lui a donné Bayes.

Théorème 1.10

Soient A un événement de probabilité $P(A) > 0$ et $B_1, B_2, \ldots, B_k$ un système exhaustif. On suppose connaître les probabilités $P(A/B_i)$ et $P(B_i)$, pour i = 1, …, k, alors

$$P(B_l / A) = \frac{P(A / B_l)\, P(B_l)}{\sum_{i=1}^{k} P(A / B_i)\, P(B_i)}, \qquad \forall\, l = 1, \ldots, k.$$

Démonstration

Pour chaque l fixé, l variant de 1 à k, on a :

$$P(B_l | A) = \frac{P(A \cap B_l)}{P(A)} = \frac{P(A/ B_l)\, P(B_l)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A/ B_l)\, P(B_l)}{\sum_{i=1}^{k} P(A/ B_i)\, P(B_i)}$$, d'après le théorème 1.8 (probabilités totales)

et ceci pour tout l = 1, …, k. D'où le résultat du théorème.

Exemple 1.15

Soit un sac contenant 6 jetons : 5 numérotés 1 et 1 numéroté 2.
Soient 2 urnes : U_1 contenant six boules blanches et quatre noires et U_2 contenant 8 blanches et 2 noires. L'expérience aléatoire comporte 2 étapes. On pioche au hasard dans le sac, on regarde le numéro et on pioche dans l'urne correspondante.
Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?
On a $U_1 \cup U_2 = \Omega$ et $U_1 \cap U_2 = Ø°$, on a donc
$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2)$
$= P(B | U_1) \times P(U_1) + P(B | U_2)P(U_2)$
= (6/10x5/6) + (8/10x1/6) = 1/3 +2/15 = 7/15.

Autre question : sachant que la boule est blanche quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_1 :
On a $P(U_1 | B) = \frac{P(B \cap U_1)}{P(B)} = \frac{P(B | U_1) \times P(U_1)}{P(B)} = \frac{P(B | U_1) \times P(U_1)}{P(B | U_1) \times P(U_1) + P(B | U_2) \times P(U_2)}$
= (6/10x5/6)/(7/15)= (1/3)/(7/15) = 5/7.

Exemple 1.16

Une population est constituée de 10 Français, 10 Allemands. 7 Français sont bruns, 3 blonds, 1 Allemand est brun, 9 blonds.
On rencontre un blond, quelle est la probabilité qu'il soit Allemand ?
Soient les événements A = "il est blond", B_1 = "Allemand" et B_2 = "Français".
On connaît $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/2$, $P(A | B_1) = 9/10$ et $P(A | B_2) = 3/10$.
On cherche $P(B_1 | A)$.
On a $B_1 \cup B_2 = \Omega$ et $B_1 \cap B_2 = Ø$, on peut donc appliquer le théorème de Bayes :
$P(B_1 | A) = \frac{P(A | B_1) \times P(B_1)}{P(A | B_1) \times P(B_1) + P(A | B_2) \times P(B_2)}$
= (9/10x1/2)/ (9/10x1/2 + 3/10x1/2) = 3/4

Exemple 1.17

Une entreprise utilise 3 machines différentes A, B, C pour fabriquer des pièces. 40 % sont fabriquées par A, 30 % par B et 30 % par C. La machine A produit 2 % de pièces défectueuses, B 4 % et C 5 %.

1) On prélève une pièce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

2) On prélève une pièce, elle est défectueuse. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de A ?

3) On prélève une pièce, elle est parfaite. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de C ?

Soient A : " être fabriqué par A'',
B : " être fabriqué par B'',
C : " être fabriqué par C'',
D : " être défectueuse" et
$\overline{D}$: '' parfaite''

On a P (A) = 0.4, P (B) = 0.3, et P (C) = 0.3.
A, B, C sont tels que $A \cap B = Ø°$, $A \cap C = Ø°$, $C \cap B = Ø$ et $A \cup B \cup C = \Omega$.

1) En appliquant la formule des probabilités totales, on a

$$P(D) = P(D \mid A) \times P(A) + P(D \mid B) \times P(B) + P(D \mid C) \times P(C)$$
$$= 0.02 \times 0.4 + 0.04 \times 0.3 + 0.05 \times 0.3.$$

2) D'après le théorème de Bayes, $P(A \mid D) = \dfrac{P(D \mid A) \times P(A)}{P(D)} = \dfrac{0,02 \times 0,4}{P(D)}$

3) $P(C \mid \overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \mid C) \times P(C)}{P(\overline{D})} = \dfrac{0,95 \times 0,3}{1 - P(D)}$

Exemple 1.18

Une urne contient 10 B, 20 R et 30 N.

On tire 3 boules sans remise. Quelle est probabilité que les 2 premières soient rouges et la troisième noire ?

Soient les événements : A :" la première boule tirée est rouge", B :"la 2ème est rouge", on a

$P(A \cap B) = P(B \mid A) \times P(A)$, or P (A) = 20/60 = 1/3 et P (B | A) = 19/59. Donc
$P(A \cap B) = 19/59 \text{ x} 1/3$.

Posons $C = A \cap B$.

Soit D :"la troisième est noire". On a $P(D \cap C) = P(D \mid C) \times P(C) = (30/58)\times(19/59\text{x}3)$

Exemple 1.19

Soient 2 dés ; l'un d'eux est pipé. il permet d'obtenir 6 dans 50 % des cas ; l'autre est parfait. On lance l'un des deux dés choisi au hasard. On obtient 6. Quelle est la probabilité qu'on ait utilisé le dé équilibré ?

Soient E : ”le dé est équilibré,”
P : ”le dé est pipé,”
A : ”obtenir 6”.
Les données sont P (E) = 1/2, P (P) = 1/2, P (A | E) = 1/6 et P (A | P) = 1/2.
On a $E \cup P = \Omega$ et $E \cap P = \emptyset$ °. On peut donc appliquer le théorème de Bayes :

$$P(E \mid A) = \frac{P(A \mid E) \times P(E)}{P(A \mid E) \times P(E) + P(A \mid P) \times P(P)} = (1/6x1/2)/(1/6x1/2+1/4)= 0.25$$

Chapitre 2

Variables aléatoires et lois de probabilité

Considérons un ensemble fondamental Ω correspondant à une certaine expérience. Les éléments de Ω, résultats possibles de l'expérience, ne sont généralement pas des nombres. Il est cependant utile de faire correspondre un nombre à chaque élément de Ω, en vue de faire ensuite des calculs. Pour un jet de dé, il semble naturel de faire correspondre à la face obtenue par le jet, le nombre de points qu'elle porte, mais ce n'est pas une obligation. Si on jette 2 dés, on s'intéressera par exemple à la somme des points obtenus. Pour une carte à jouer, il faut convenir d'une valeur pour chaque carte.

1. Variables aléatoires

Définition 2.1

On appelle variable aléatoire réelle (v.a.r) toute application mesurable

$$X : (\Omega, \mathcal{A}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}_R)$$
$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

- $\mathcal{B}_R$ est la tribu borelièneWe sur $\mathbb{R}$, c'est - à - dire la tribu engendrée par les intervalles ouverts de R.
- Mesurable : $\forall A \in \mathcal{B}_R : X^{-1}(A) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X^{-1}(A) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$

Remarque

- Si $X(\Omega) = V$ est discret (fini ou infini dénombrable), alors X est dite variable aléatoire réelle discrète.
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble continu de $\mathbb{R}$, alors X est dite variable aléatoire réelle continue.

Notations

Si X est une variable aléatoire réelle définie sur $\mathbb{R}$, et si $a \in \mathbb{R}$ alors :

1) $(X = a) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ c'est l'ensemble des résultats de l'expérience aux quels x associe la valeur a.
2) $(X \leq a) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$
3) $(a \leq X \leq b) = \{ \omega \in \Omega / a \leq X(\omega) \leq b\}$, i ci on suppose $a < b$
4) Si E est une partie de $\mathbb{R}$, alors $(X \in E) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) \in E\}$

Exemple 2.1

On lance 2 pièces de monnaies $\Rightarrow \Omega = \{p, f\}$ 2 = {(p, p), (p, f), (f, p), (f, f)},

Le joueur marque 1 point chaque fois qu'il obtient ''p''

$V = X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, X est une variable aléatoire discrète (v.a.discrète)

$(X= 0) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) = 0\} = \{(f, f)\}$

$X^{-1}(\{1\}) = \{ \omega \in \Omega / X(\omega) = 1\} = \{(p, f), (f, p)\}$.

2. Loi de probabilité – Fonction de répartition – Densité de probabilité

2.1. Loi de probabilité

Définition 2.2

On appelle loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle X définie sur (Ω, A), la donnée des probabilités $P(X \in E)$, pour tout intervalle E de $\mathbb{R}$.

Plusieurs cas se présentent

a) <u>Variable aléatoire discrète finie</u>

$V = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

La loi de probabilité de X est parfaitement déterminée par la donnée des quantités $p_i = P(X = x_i)$, pour tout i = 1, 2, …, n, vérifiant :

$$\begin{cases} p_i \geq 0, \ \forall \ i = 1, ..., n \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$$

b) Variable aléatoire discrète dénombrable

$V = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

La loi de probabilité de X est parfaitement déterminée par la donnée des quantités $p_i = P(X = x_i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, vérifiant :

$$\begin{cases} p_i \geq 0, \ \forall \ i = 1, ..., n \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{cases}$$

c) Variable aléatoire continue

$V = X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$,

La loi de probabilité de X est parfaitement déterminée par la donnée des probabilités $P(X \leq x)$, $\forall \ x \in \mathbb{R}$.

2.2. Fonction de répartition et densité de probabilité

Définition 2.3

On appelle fonction de répartition, ou fonction de distribution, d'une variable aléatoire réelle X, l'application

$$F : \mathbb{R} \longmapsto [0, 1]$$
$$x \longmapsto F(x) = P(X \leq x).$$

Propriétés

La fonction de répartition F(x) d'une variable aléatoire réelle X satisfait les conditions suivantes :

- $0 \leq F(x) \leq 1, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} F(x) = 1$
- $F(a) \leq F(b)$, $\forall \ a \leq b$, c'est - à - dire F(x) est une fonction croissante
- F(x) est une fonction continue à droite, en tout point x, c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Représentation graphique de la fonction de répartition (f.r)

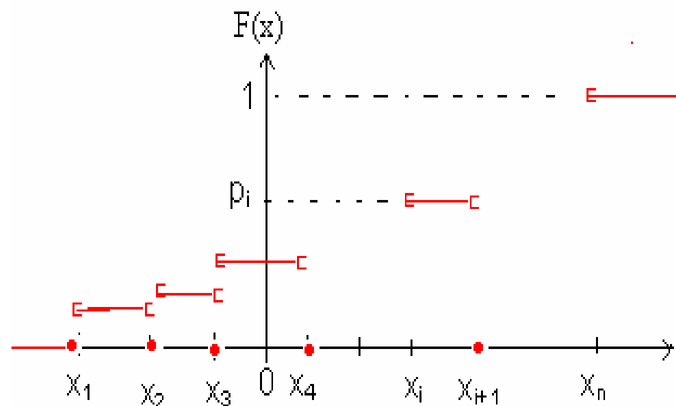
a) <u>cas discret fini</u>

$V = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

* $F(x_i) = P(X \leq x_i) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_i)$

$= \quad p_1 \quad + \quad p_2 \quad + \ldots + \quad p_i$

* $F(x) = F(x_i)$, pour tout $x_i \leq x < x_{i+1}$



Fonction de répartition d'une v.a.r discrète finie

Le graphique de F(x) se présente sous la forme d'une courbe en escalier, présentant des sauts de valeurs p_i, en chacune des valeurs discrètes x_i prises par la v.a.r X.

Exemple 2.2

Reprenons l'exemple 2.1, pour lequel on lance 2 pièces de monnaies équilibrées.

$P(X = 0) = P((f, f)) = \frac{1}{4}$

$P(X = 1) = P((f, p), (p, f)) = \frac{1}{2}$

$P(X = 2) = P((p, p)) = \frac{1}{4}$

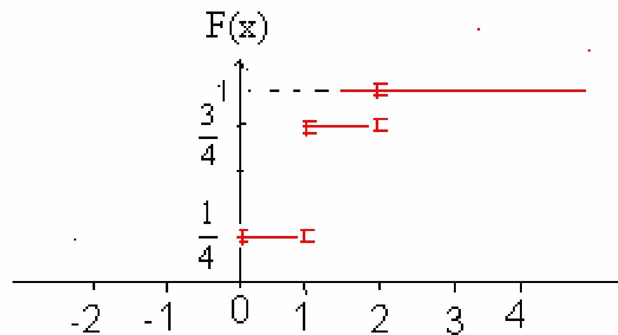
$V = X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

Si $x < 0$, alors on a : $F(x) = P(X < 0) = 0$

Si $0 \leq x < 1$, alors on a : $F(x) = P(X \leq x) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$

Si $1 \leq x < 2$, alors on a : $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Si $2 \leq x$, alors on a : $F(x) = P(X \leq x) = P(X \leq 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$



Fonction de répartition de l'exemple 2.2

b) <u>cas discret infini dénombrable</u>

Même chose que le cas discret fini, seulement on a un nombre infini de valeurs.

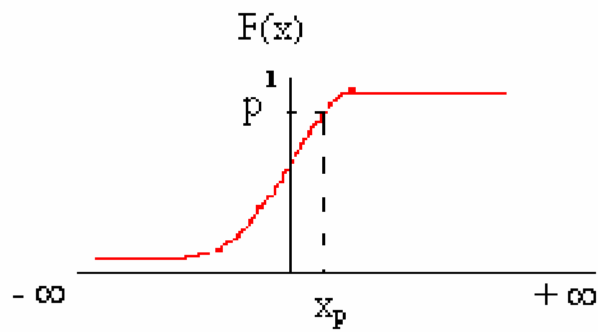
Définition 2.4

Si la fonction de répartition F(x) d'une v.a.r. continue X est dérivable pour tout x élément de $\mathbb{R}$, de dérivée f(x), sauf peut être en un nombre fini de points, et si :

$$\forall X \in \mathbb{R},\ P(X \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ .$$

On dit que X est une v.a.r absolument continue (ou à densité), et la fonction f(x) est appelée la densité de probabilité de X.

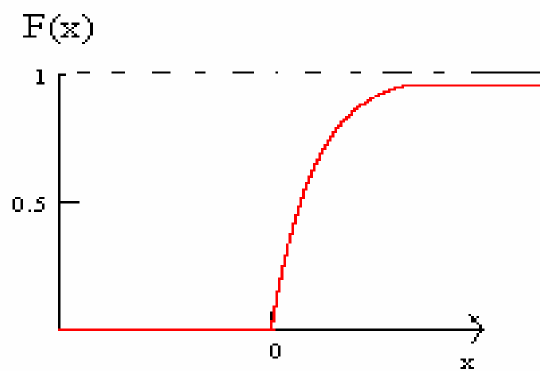
* Représentation graphique de la fonction de répartition (f. r) : cas continue



Fonction de répartition d'une v. a. continue

Exemple 2.3

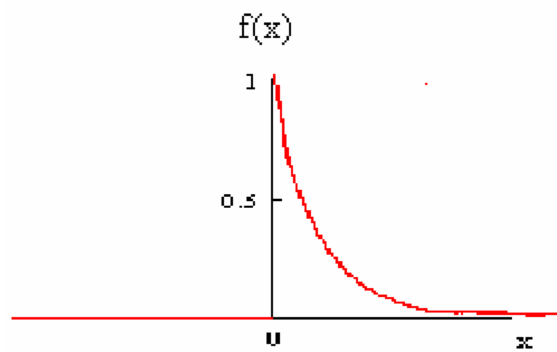
On considère la fonction $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$



Fonction de répartition de l'exemple 2.3

$$F'(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On peut poser $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

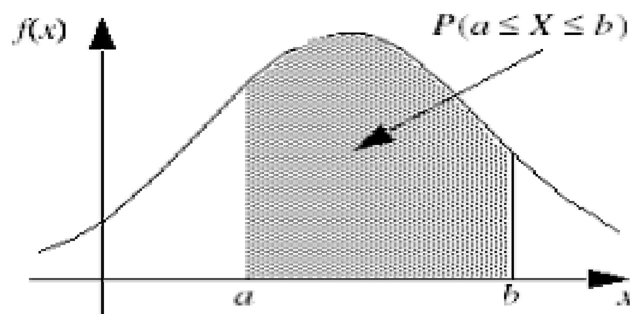


Fonction de densité de l'exemple 2.3

Propriétés

Si X est une v.a r. absolument continue de densité f(x), alors on a :

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, b \in \mathbb{R},\ a \leq b,\ P(\, a \leq X \leq b\,) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$



Fonction de densité d'une v.a. continue

$$-\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) \geq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$

Remarque

$P(X = a) = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, car X est une v. a. absolument continue.

3. Espérance mathématique et moments

Historiquement, la notion d'espérance mathématique est née dans le but de partager équitablement les enjeux dans des jeux de hasard opposant plusieurs joueurs lorsqu'une partie du jeu venait à être interrompue avant son terme.

On peut dire aussi que l'espérance mathématique cherche à traduire la tendance centrale de la loi. Il s'agit d'une moyenne où chacune des valeurs x_i intervient d'autant plus que sa probabilité est importante, c'est-à-dire d'un barycentre ou d'un centre de gravité.

3.1. Variable aléatoire discrète finie

Définition 2.5

Soit X une v. a. discrète finie sur (Ω, A, P), on appelle espérance mathématique de X, notée E(X), la quantité : $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$, où $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est l'ensemble des valeurs de X.

Exemple 2.4

Le jeu de « chuck – a – luck » (lancer une chance), se jeu comme suit :
On lance 3 dés parfaits, le joueur mise 1 dh, par exemple, sur l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Supposons qu'il mise sur le 5,
Si le 5 sort 1 fois, le joueur gagne 1 dh
Si le 5 sort 2 fois, le joueur gagne 2 dh,
Si le 5 sort 3 fois, le joueur gagne 3 dh.
Si le 5 ne sort pas, le joueur perd 1 dh.

Soit X la variable aléatoire qui correspond au gain net du joueur, c'est une variable aléatoire discrète avec V = X (Ω) = {-1, 1, 2, 3}

- $P(X = -1) = \frac{125}{216} > \frac{1}{2}$

- P (X = 1) = $\frac{75}{216}$
- P (X = 2) = $\frac{15}{216}$
- P (X = 3) = $\frac{1}{216}$

E(X) = $(-1)\ \frac{125}{216} + (1)\ \frac{75}{216} + (2)\ \frac{15}{216} + (3)\frac{1}{216}$ = - 0,08. On peut dire qu'en moyenne, le joueur perd 8% de sa mise.

3.2 Variable aléatoire discrète dénombrable

Définition 2.6

Soit X une v. a. discrète dénombrable sur (Ω, A, P), on appelle espérance mathématique de X, notée E(X), la quantité : E(X) = $\sum_{i=1}^{\infty} x_i\ P(X = x_i)$, où $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ est l'ensemble des valeurs de X, existe lorsque la série est convergente.

Exemple 2.5

Soit X une v.a discrète infinie dénombrable, où V = {0, 1, 2, …, n, ….} et

$p_k = P(X = k) = \lambda \frac{e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda > 0$, donc E(X) = $\sum_{k=1}^{\infty} k\ P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \lambda \frac{e^{-\lambda}}{k!} = \lambda$.

Exemple 2.6 (v.a. discrète n'admettant pas d'espérance)

Soit X une v.a.r. qui prend les valeurs x^{3k}, $k \in \mathbb{N}^*$ avec $P(X = x^{3k}) = \frac{2}{3^{k+1}}$, cela définit bien une loi de probabilité, en effet :

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2}{3^{k+1}} \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^k = \frac{2}{3} \frac{1}{1\ \ \frac{1}{3}} = 1$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty} x^{3k}\frac{2}{3^{k+1}}$ est la série de terme général $\frac{2}{3}$ qui diverge, donc X n'admet pas d'espérance mathématique.

3.3. Variable aléatoire continue

Définition 2.7

Soit X une v.a. absolument continue sur (Ω, A, P), de densité de probabilité f(x), on appelle espérance mathématique de X le nombre :

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ $\left(= \int_{\Omega} XdP\right)$, cette espérance mathématique existe lorsque l'intégrale est convergente.

Exemple 2.7

Soit X une v.a.r. qui admet comme densité de probabilité la fonction

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \frac{1}{3} 1_{[0,3]}(x)$$

F(x) est bien une densité de probabilité, en effet :

$$F(x) \geq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{0}^{3} \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}.3 = 1.$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{3} x\frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}[\frac{1}{2}.x^2]_0^3 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Exemple 2.8 (v. a. continue n'admettant pas d'espérance : loi de Cauchy)

Soit X une v.a.r absolument continue de densité de probabilité

$f(x) = \frac{1}{\pi}.\frac{1}{1+x^2}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

f(x) est bien une densité de probabilité, en effet :

$f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} [\text{arctg}(x)]_0^{\infty} =$ $\frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1.$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ n'existe pas, car $\frac{x}{1+x^2}$ est équivalente à $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini $\Rightarrow \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$ n'est pas définie $\Rightarrow$ E(X) n'existe pas.

Théorème 2.8

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, A, P), alors on a :

1) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, E(a. X + b) = a. E(X) + b

2) $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$, E (a. X + b. Y) = a. E(X) + b. E(Y)

Démonstration

Supposons que les v.a.r X et Y sont absolument continues de densités respectivement f(x) et g(y) (la démonstration reste valable pour le cas discret).

1) $E(a. X + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (a\,x + b) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} a\,x\, f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f(x) dx$

$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, car l'intégrale est linéaire

$= a\, E(X) + b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$

2) $E(a. X + b. Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) h(x, y) dy dx$, où h(x, y) est la densité de probabilité du couple (X, Y) (voir chapitre 3)

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} ax\, h(x, y) dy\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} by\, h(x, y) dx\right) dy$

$= a \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} y\, g(y) dy$

$= a\, E(X) + b\, E(Y) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}.$

•

3.4. Moments d'une variable aléatoire

Définition 2.9

Soit X une v.a.r sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

1) On appelle moment d'ordre k, $k \in Z^*$, le nombre m_k défini par :
   $m_k = E(X^k)$
2) On appelle moment centré d'ordre k, $k \in Z^*$, le nombre μ_k défini par : $\mu_k = E[X - E(X)]^k$.

Exemple 2.9

Reprenons l'exemple 2.7

- $m_k = E(X^k) = \ldots = \frac{3^{k+1}}{3(k+1)} = \frac{3^k}{(k+1)}, \forall k \geq 1.$
- $\mu_k = E[X - E(X)]^k = E[X - \frac{3}{2}]^k = \ldots = \frac{1}{3}\frac{1}{(k+1)}[(x-\frac{3}{2})^{k+1}]_0^3$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{(k+1)}[(\frac{3}{2})^{k+1} - (-\frac{3}{2})^{k+1}]$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si k est impair.} \\ \frac{1}{3}\frac{2}{(k+1)}(\frac{3}{2})^{k+1} \text{ si k est pair.} \end{cases}$$

Remarque

Le moment centré d'ordre 2 (k = 2) est appelé la variance de X, cette variance est notée $\sigma_X^2 = V(X) = \mu_2 = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ est appelé l'écart - type de X.

Théorème 2.10

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, alors on a :

1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $V(a.X) = a^2 V(X)$
2) $\forall b \in \mathbb{R}$, $V(X + b) = V(X)$
3) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$

Démonstration

1) Soit $a \in \mathbb{R}$, alors
$V(a.X) = E[(aX - E(aX))]^2 = E[a^2(X - E(X))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V(X)$.

2) Soit $b \in \mathbb{R}$, alors

$V(X + b) = E[(X + b) - E(X + b))]^2 = E[(X + b - E(X) - b)]^2 = E[(X - E(X))]^2 = V(X)$.

3) $V(X + Y) = E[(X + Y) - E(X + Y))]^2 = E[(X - E(X)) + (Y - E(Y))]^2$

$= E[(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E[(X - E(X)(Y - E(Y))]$

$= V(X) + V(Y) + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$.

•

Chapitre 3

Lois usuelles

1. Introduction

On a un phénomène aléatoire que l'on veut comprendre. Ce phénomène aléatoire est à priori complexe et on ne peut calculer directement les probabilités de ses événements.
Ex : comprendre la dépense annuelle des ménages marocains pour les loisirs; par exemple, on veut calculer la probabilité qu'ils dépensent 5 000 dh par an. On dispose donc d'une population pour laquelle le modèle est destiné, d'un individu et d'un caractère étudié (représenté par une variable aléatoire X).

Que fait-on ?

1 - Pour avoir une première idée du phénomène représenté par une variable aléatoire X, on peut faire plusieurs observations de X.

Ex : X = dépense annuelle pour les loisirs d'un ménage (variable aléatoire attachée à un individu). On demande à un certain nombre de ménages ses dépenses annuelles en loisirs. On a donc la valeur de X_i, X_i étant la dépense annuelle pour le ménage i.

Cette suite d'observation débouche sur la définition d'une variable statistique X souvent décrite de la manière suivante :

Valeurs de X	fréquences
X_i	$f_i = n_i/n$

On étudie cette variable statistique à l'aide des techniques des statistiques descriptives.

2 - Il y a quelques lois de probabilité ou lois théoriques qui décrivent assez bien un grand nombre de phénomènes aléatoires. On veut représenter le phénomène aléatoire par une loi de probabilité théorique. Cette modélisation est évidemment plus riche que la représentation par une variable statistique : ici on peut calculer la probabilité de tout événement associé au phénomène aléatoire. Dans ce chapitre, nous allons fournir un catalogue de lois de probabilité discrètes (description, étude) souvent utiles en pratique.
Le statisticien plus chevronné construira ses propres modèles théoriques.

3 - Après le choix d'un modèle théorique se pose la question suivante : peut-on quantifier l'approximation du phénomène aléatoire par le modèle théorique.

2 Loi de Bernoulli

Toute épreuve n'ayant que 2 résultats possibles peut-être considérée comme une situation d'alternative.
En d'autres termes, les 2 résultats possibles sont complémentaires l'un de l'autre.
Il s'agit d'une situation fréquente dans la pratique dès que l'on cherche à mettre en ´évidence un caractère particulier au sein d'une population : tout individu de cette population peut être décrit selon une alternative : soit il présente ce caractère, soit il ne le présente pas.

Exemple 3.1 : Etude de l'impact d'une campagne publicitaire pour un nouveau produit.
Q1 : Est-ce que l'individu possédait ce produit auparavant ?
Q2 : L'individu a-t-il été touché par la campagne ?
Q3 : La campagne a-t-elle induit l'achat ?

Souvent les résultats possibles sont des objets qualitatifs. Pour les quantifier, il faut leur trouver un codage.

On définit ainsi une v. a . X dite de Bernoulli (savant suisse 1654-1705) par

$$X = \begin{cases} 1 & (succès) \quad avec\, la\, probabilité \quad p \\ 0 & (échec) \quad avec\, la\, probabilité \quad 1-p \end{cases}$$

Définition 3.1

On réalise une expérience aléatoire qui a 2 résultats possibles : le succès avec la probabilité. p, et l'Echec avec la probabilité 1 - p. La v.a

$$X = \begin{cases} 1 & si\, succès \\ 0 & si\, échec \end{cases}$$

Propriété

E(X) = p
V (X) = p (1 - p)

Remarque :
La loi Bernoulli est la plus simple des lois de probabilité.

3 La loi Binomiale

C'est une succession d'épreuves de Bernoulli (n) indépendantes.

Définition 3.2

On réalise n fois successivement et d'une manière indépendante une expérience aléatoire qui a 2 résultats possibles, succès avec la probabilité p et l'échec avec la probabilité q =1 – p.

X = nombre de succès obtenus est une v. a. binomiale de paramètres n et p.

Notation: X ~ B (n, p).

Remarque :
On peut également la définir comme une somme de v. a. de Bernoulli.
A chaque épreuve i, on associe la v. a. de Bernoulli X_i
$X = \sum X_i$.

Loi de probabilité : X ~ B (n, p)
X (Ω) = { 0, . . . , n }
P(X = k) = $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, 8 k = 0, 1, …, n

n : nombre d'épreuves,
k : nombre de succès),
p : probabilité du succès.

Propriétés
E(X) = n p
V (X) = n p(1 - p) = n p q

Remarque :

La loi binomiale est une loi tabuler.

Exemple 3.2
Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de 0,01. La machine doit être utilisée 100 fois.

Soit X= nombre de pannes obtenues après 100 utilisations.
1) Quelle est la loi de X ?
Calculer P(X = 0), P(X = 1) et P(X - 4).
2) On estime le coût d'une réparation à 500 F. Soit la v.a Y représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations.

Exprimer Y en fonction de X et calculer E(Y) V (Y).
Solution:
1) X s B (100, 0.01) ; P(X = 0) = $C_{100}^0 (0.01)^0 (0.99)^{100}$ = 0, 366
P(X = 1) = $C_{100}^1 (0.01)^1 (0.99)^{99}$ = 100 × 0, 01 × $(0.99)^{99}$ = 0, 377
P(X = 4) = 1 - (. . .) = 0, 061
2) Y = 500X
E(Y) = 500 E(X) = 500 × 100 × 0, 01 = 500
V (Y) = 500^2 V (X) = 500^2 0, 99 = 247500

Exemple 3.3
Dans une pépinière 95% des scions (jeunes arbres greffés) sont supposés sans virus. Par commodité les scions sont rangés par paquets de 2. Un paquet est dit sain si les 2 scions le sont.
1) Quelle est la probabilité d'avoir un paquet sain ?
2) X = nombre de paquets sains sur un lot de 10. Quelle est la loi de X ?
3) Un lot de 10 est accepté par l'acheteur si 9 au moins des paquets sont sains. Quelle est la probabilité qu'un lot soit accepté *?*

Solution :
1) p = 0, 95 × 0, 95 = 0, 9025
2) X s B (10, p)
3) P(X ≥ 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0, 7361

4 Loi de Poisson

Siméon Denis Poisson (1781-1840) est un probabiliste, mathématicien et physicien français à qui l'on doit d'importants développements sur la loi des grands nombres, les suites d'épreuves de Bernoulli mais aussi sur les applications des probabilités dans le domaine du droit.

Définition 3.3
X est une v. a. de Poisson de paramètre λ si et seulement si
X (Ω) = N, et P(X = k) = $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k}}{\lambda!}$, ∀ k ∈ N.

Notation : P (λ)
On est dans la situation où X (Ω) est infini dénombrable. On peut maintenant poser la loi de Poisson comme modèle d'une épreuve aléatoire :

Exemple 3.4
Dans un hôpital parisien, il arrive en moyenne 1,25 personnes à la minute aux urgences entre 9 h et 12 h.
X : nombre de personnes observées à la minute à l'entrée de ce service.
On admet X s P (λ) avec λ = 1, 25
Déterminer les probabilités suivantes
a) En 1mn il arrive 2 personnes b) 4 personnes au plus c) 3 personnes au moins.
a) P(X = 2) = 0, 2238
b) *P*(*X* = 4) = 0*,* 9909
c) P(X = 3) = 1 - P(X ≤ 2)
= 1 - 0, 8685
= 0, 1315.

4. Loi de Laplace - Gauss ou loi normale

Lorsqu'une grandeur subit l'influence d'un grand nombre de facteurs de variation, et que ceux-ci sont très petits et indépendants les uns des autres. On

peut démontrer que les valeurs de cette grandeur se distribuent suivant une loi de Laplace - Gauss. Cette propriété confère à cette loi, appelée plus simplement ‘’loi normale ‘’.

Considérons par exemple une variété commercialement pure de blé cultivé sur un grand nombre de petites parcelles (disons 500) toutes égales. Toutes ces parcelles sont réparties sur un champ aussi homogène que possible. A la récolte, on constate que le poids de grain par parcelle varie de façon assez importante. C’est que de nombreux facteurs de variation sont venus exercer leur influence sur le rendement. Et aussi entre les grains de variété pure, il existe des légères différences. Il y a aussi la fertilité des parcelles qui n’est pas uniforme. On pourrait prendre aussi en compte l’action des pluies, de la température qui n’a pas été identique en tous les points des champs. Les mauvaises herbes se sont développées de façons irrégulières de que l’action des insectes et parasites, etc. Dû à toutes ces irrégularités, les rendements parcellaires présentent une certaine dispersion, et l’on constate que ceux-ci se distribuent suivant une loi voisine d’une loi normale.

La loi normale occupe une place de choix parmi les différentes lois de probabilité.

Définition 3.4

Une variable aléatoire X admet une distribution normale, de paramètres $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 > 0$, si la densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}, \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Notation $X \sim N(m, \sigma)$

Propriétés

a) $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$
b) La loi normale, notée $N(\mu, \sigma)$, est symétrique par rapport à la droite d'abscisse m.

Exemples 3.5

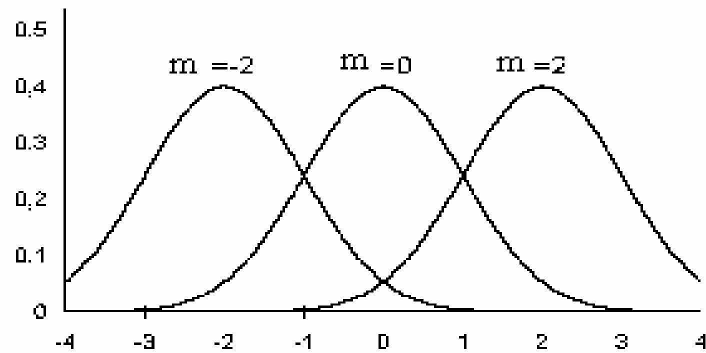


Figure de la normale N (m, 1) pour les valeurs de m = -2 ; 0 et 2

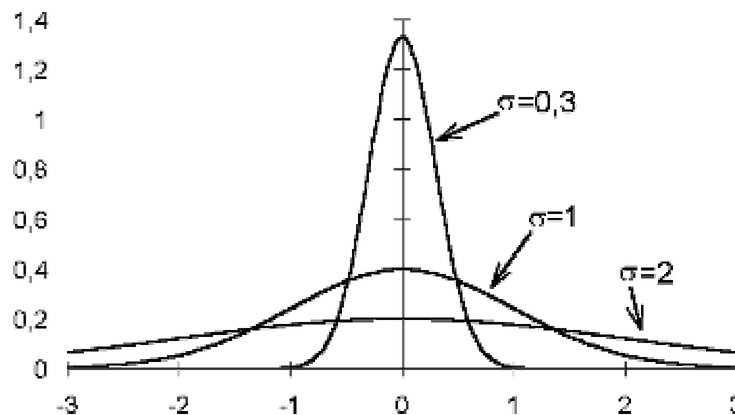


Figure de la normale N (0, σ) pour les valeurs de σ = 0.3 ; 1 et 2

Remarque

Il est souvent plus aisé de se ramener à une normale centrée réduite N (0,1) appelée variable aléatoire centré réduite (m = 0 et σ = 1), pour cela il suffit de poser

$\xi = \dfrac{X-m}{\sigma}$ (E (ξ) = 0 et V (ξ) = 1) ⇒ la densité de probabilité de ξ est

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

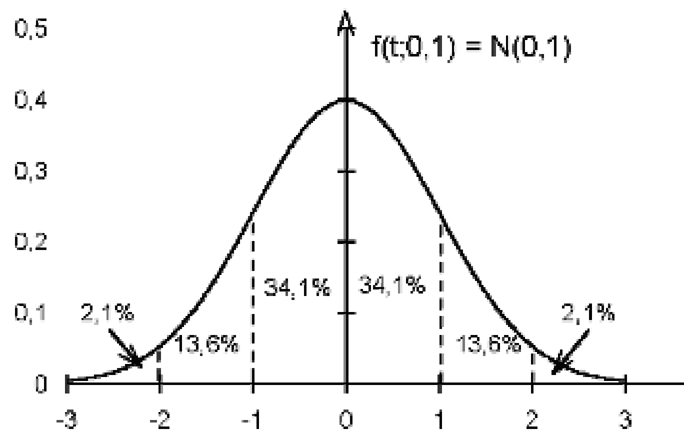


Figure de la normale centrée réduite N (0, 1)

$$\forall\, x \geq 0 \quad F_\xi(-x) = 1 - F_\xi(x)$$

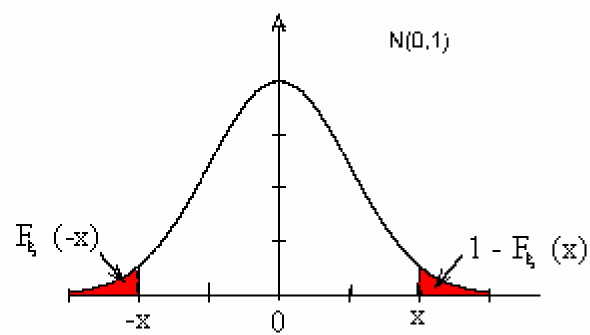


Figure de la normale centrée réduite N(0, 1)

Chapitre 4

VARIABLES ALEATOIRES BIDIMENSIONNELLES ET LOIS DE PROBABILITE

1. VARIABLES ALEATOIRES BIDIMENSIONNELLES

En pratique, on est souvent amené à étudier simultanément, pour n individus, les observations relatives à deux variables ou caractères. Par exemple : pour un gaz, la pression et le volume, à température constante; la taille et le poids des individus; les ventes et les prévisions de vente d'un bien en différents lieux; les ventes d'une entreprise en fonction du temps; les prix et les quantités demandées pour un bien économique.

Définition 3.1

Soit (Ω, $\mathcal{A}$, P) un espace probabilisé, le couple (X, Y) est appelé une variable aléatoire bidimensionnelle réelle, si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si chaque élément du couple est une variable aléatoire.

Exemple 4.1

On jette simultanément un dé blanc et un dé noir.

X : désigne le nombre sur la face supérieure du dé blanc

Y : désigne le nombre sur la face supérieure du dé noir.

(X, Y)(Ω) = V ((X, Y)) = {(i,j) ; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 et j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 } est l'ensemble des valeurs prises par le couple (X, Y).

2. LOIS DE PROBABILITE BIDIMENSIONNELLES

2.1. Lois de probabilité bidimensionnelles discrètes

Définition 4.2

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, le couple (X, Y) est une variable aléatoire bidimensionnelle discrète, si X et Y sont des variables aléatoires discrètes. La loi de probabilité de (X, Y) est donnée par p(x, y) = P(X = x, Y = y) $\forall$ x $\in \mathbb{R}$ $\forall$ y $\in \mathbb{R}$, avec

p(x, y) = $\geq$ 0, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $\forall$ y $\in \mathbb{R}$,

$$\sum_x \sum_y x\, y\, p(x, y) = 1$$

Remarque

Si X prend les valeurs $x_1, x_2,\ldots, x_k$ Y prend les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_l$

Alors (X, Y) prend les valeurs (x_i, y_j) pour i = 1, 2, …, k et j = 1, 2, …, l.

La loi de probabilité est souvent présentée sous la forme d'un tableau à double entrée.

Exemple 4.2

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise, et on note X et Y les numéros obtenus.

Soient X et Z = Sup(X, Y).

$\Omega = \{l, 2, 3, 4\}^2$ et P est la probabilité uniforme.

Les lois de (X, Y) et de (X, Z) sont données par les tableaux suivants :

Y / X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Z \ X	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$

2.2. Lois de probabilité bidimensionnelles continues

Définition 4.3

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, le couple (X, Y) est une variable aléatoire bidimensionnelle continue, si X et Y sont des variables aléatoires continues. La fonction de densité de probabilité f(x, y) est telle que :

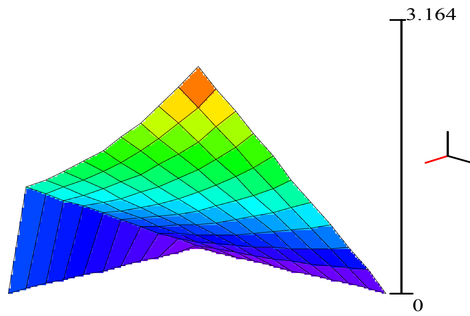
1) $f(x, y) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$,

2) $\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} f(x, y)dx\, dy = 1$.

Exemple 4.3

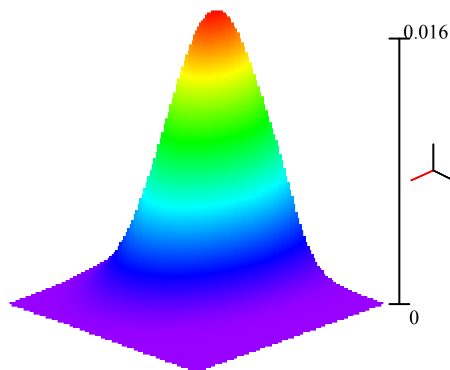
On considère un couple (X, Y) de variable aléatoire, de densité de probabilité

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{e-1} x\, e^{y} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



f

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{5}\sqrt{2}}\, e^{\,(x \;\; 2)^2}\, x\, e^{\,y} & \text{si } 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



f

On a :

1) $f(x, y) \ge 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ y \in \mathbb{R}$,

2) $\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = \int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} \frac{2}{e \;\; 1} x\, e^{y}\ dxdy = \frac{2}{e \;\; 1}\int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} x\, e^{y}\ dxdy$

$$= \int_{\infty}^{+\infty} x\, dx \int_{\infty}^{+\infty} e^{y}\, dy$$

$$= \frac{2}{e \quad 1} \quad \frac{1}{2}(e - 1) = 1.$$

Remarque dans le cas continu $P(X = x, Y = y) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$.

3. FONCTION DE REPARTITION D'UN COUPLE DE VARIABLE ALEATOIRE

Définition 4.4

La fonction de réparation de (X, Y) est définie par

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Propriétés

La densité de probabilité est f(x, y), chaque fois que les dérivées partielles existent.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim\limits_{\substack{y \to -\infty \\ x \to -\infty}} F(x,y) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{y \to +\infty \\ x \to +\infty}} F(x, y) = 1$
- si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors

  $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) \geq 0.$

4. LOIS MARGINALES

De la fonction de probabilité du couple (X, Y), on déduit aisément la fonction de probabilité unidimensionnelle de X et de Y appelée : loi marginale de X et loi marginale de Y.

4.1. Cas discret

Si $V(X) = \{ x_1, x_2, \ldots, x_k \}$ et si $V(Y) = \{ y_1, y_2, \ldots, y_l \}$, alors :

la loi marginale de X est donnée par $p_{i\bullet} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{l} p_{ij} \quad \forall i = 1, \ldots, k$

et la loi marginale de Y est donnée par $p_{\bullet j}$ = P(X = y_j) = $\sum_{i=1}^{k} p_{ij}$ $\forall$ j = 1, …,l.

Reprenons l'exemple 4. 2

Z \ X	1	2	3	4	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
2	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
3	0	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
4	0	0	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	**1**

La loi marginale de X est donc

x_i	1	2	3	4
$p_{i\bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La loi marginale de Y est donc

y_j	1	2	3	4
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

4.2. Cas continu

Si le couple (X, Y) admet une densité de probabilité f(x, y), alors :

La loi marginale de X possède comme densité la fonction f(x) = $\int_{\infty}^{+\infty}$ f(x, y)dy

La loi marginale de Y possède comme densité la fonction g(y) = $\int_{\infty}^{+\infty}$ f(x, y)dx

Reprenons l'exemple 4.3

- f(x) = $\int_{\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{2}{e\ \ 1} x\, e^{y}\, dy = 2x$ pour $x \in [\, 0\, ,\, 1\,]$

C'est – à dire $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

- g(y) = $\int_{\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{\infty}^{+\infty} \frac{2}{e\ \ 1} x\, e^{y}\, dx = \frac{e^{y}}{e\ \ 1}$ pour $y \in [\, 0\, ,\, 1\,]$

C'est – à dire $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{y}}{e\ \ 1} & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

5. VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

Deux variables aléatoires X et Y sont dits indépendantes, au sens des probabilités, si $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, les événements ($a \le X \le b$) et ($c \le Y \le d$) sont indépendants, c'est - à – dire
$P (a \le X \le b) \cap (c \le Y \le d)) = P(a \le X \le b)\, P(c \le Y \le d)$.

a) cas discret

X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$; $\forall$ i = 1, …,k et $\forall$ j = 1, …,l.

Exemple 4. 4

L'expérience consiste à lancer un dé parfait et une pièce de monnaie non équilibrée de telle sorte que P (pile) = $\frac{3}{4}$.

Considérons les variables aléatoires X et Y, telle que (X = 0) = (avoir pile), (X = 1) = (avoir face) et Y est le nombre obtenu par la face supérieure du dé.

Donc la loi de probabilité du couple est donnée par le tableau suivant

Y X	1	2	3	4	5	6	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	**1**

On peut facilement vérifier que $p_{ij} = p_{i\bullet}\, p_{\bullet j}$; $\forall$ i = 1, 2 et $\forall$ j = 1, …, 6,

donc les 2 v. a sont indépendantes.

b) cas continu

X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow$ f(x, y) = f(x) g(y) ; $\forall$ x , y $\in \mathbb{R}$, c'est – à - dire la densité du couple est égale au produit des densités marginales.

Exemple 4.5

Reprenons l'exemple 3.3 pour lequel nous avons

$$f(x,y) = \frac{2}{e\quad 1} x\, e^{y} \text{ si } 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le 1$$

$$0 \qquad \text{ailleurs}$$

Cette fonction f(x, y) on peut l'écrire de la façon suivante

$f(x,\ y) = \dfrac{2}{e\quad 1} x\ e^{y}\ \mathbf{1}_{[0,1]}(x)\ \mathbf{1}_{[0,1]}(y) = \dfrac{e^{y}}{e\quad 1} \mathbf{1}_{[0,1]}(y)\ 2x\ \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = f(x)$

$g(y)$, $\forall\ x\ ,\ y \in \mathbb{R}$, donc les deux variables X et Y sont indépendantes.

6. ESPERANCE MATHEMATIQUE ET MOMENTS

Définition 4.5

Soit (X, Y) une variable aléatoire bidimensionnelle, on appelle espérance mathématique de (X, Y), le vecteur E ((X, Y)) = (EX, EY)

Définition 4.6

On appelle moment centré d'ordre r+s, pour la variable aléatoire (X, Y), l'expression $\mu_{rs} = E\ [(X - EX)^{r}(Y - EY)^{s}]$, $\quad r\ ,\ s \in N$.

Cas particuliers

Si r = 2 et s = 0, alors $\mu_{20} = E\ [(X - EX)^{2}] = \sigma_X^{2}$ = variance marginale de X

Si r = 0 et s = 2, alors $\mu_{02} = E\ [(Y - EY)^{2}] = \sigma_Y^{2}$ = variance marginale de Y

Si r = 1 et s = 1, alors $\mu_{11} = E\ [(X - EX)\ (Y - EY)] = E\ (XY) - E(X)\ E(Y) = \sigma_{XY}$

= covariance de X et Y, notée cov(X, Y).

On appelle la matrice de variance - covariance de (X, Y), la matrice

$$\mathbf{\Sigma_{2x2}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

Remarque

* Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors cov(X, Y) =0.

* Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors
E (XY) = E(X) E(Y).

* Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors
V(X+Y) = V(X) + Var(Y).

Définition 4.7

Le coefficient de corrélation entre X et Y est défini par

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$, on suppose $\sigma_X \neq 0$ et $\sigma_Y \neq 0$.

Le modèle statistique le plus simple à utiliser et à comprendre est le modèle de régression linéaire simple. C'est le modèle qui permet de mesurer l'influence d'une variable quantitative sur une autre variable quantitative.

On peut s'intéresser par exemple à l'influence de la température sur la longueur d'une tige en métal, tel qu'un rail de chemin de fer. Tout le monde sait que les rails de chemins de fer ne sont pas placés avec une jointure parfaite en raison de l'élongation due à la chaleur.

On peut s'intéresser à l'influence de la taille sur le poids, pour des animaux ou des êtres humains, ou de l'ancienneté sur le salaire. Attention dans les trois exemples que j'ai pris, j'ai pris soin de donner que des variables continues, ou pour lesquelles la continuité est acceptable. J'ai aussi pris soin de prendre trois exemples dans lesquels il n'y a pas vraiment d'ambiguïté sur le sens de la liaison entre les variables, personne ne penserait à dire que c'est la hauteur du mercure dans un tube qui influence la température ou qu'une augmentation de salaire fait augmenter l'ancienneté.

La plupart du temps, les utilisateurs pensent que pour mesurer une liaison entre deux variables quantitatives il faut calculer un coefficient de corrélation linéaire. Il est sur que la régression linéaire simple et le calcul du coefficient de corrélation linéaire ont un lien très fort entre eux, mais ont certaines différences qu'il s'agit de comprendre. Tout d'abord il faut noter que pour les variables quantitatives qui ne sont pas continues, on utilise très souvent les coefficients de corrélation et la régression linéaire et qu'il s'agit dans les deux cas d'une approximation. La continuité parfaite des variables n'existe pas très souvent dans la réalité.

Une fois cela noté, la différence essentielle, réside dans le fait que dans la corrélation le rôle des deux variables est parfaitement interchangeable, dans la régression linéaire il ne l'est pas. Ce ne sont pas les statistiques qui peuvent dire si une variable est explicative ou à expliquer. Les avantages de la régression linéaire simple par rapport à la corrélation linéaire sont nombreux.

Les principes de la régression linéaire simple se généralisent à la régression non linéaire, quadratique ou logarithmique par exemple, mais surtout à la régression multiple, puis à la régression sur variables qualitatives que l'on appelle analyse de variance, et à toutes les variantes de ce que l'on appelle les modèles linéaires, analyses de covariances et autres.

Théorème 4.8

Quelque soit les variables aléatoires X et Y, nous avons

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

Démonstration

$$|\rho_{XY}| = \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} \,|\, E\,[(X - EX)\,(Y - EY)]\,| \leq \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y}\, E|(X - EX)\,||(Y - EY)|$$

$$\leq \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} \left(E(X \quad EX)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(E(Y \quad EY)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$, d'après l'inégalité de Schwartz

$$\leq \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = 1.$$

•

Exemple 4.6

Soit (X, Y) un couple de v.a. dont la loi de probabilité est

Y / X	1	2	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	**1**

La loi marginale de X

X	0	1

$p_{i\bullet}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

La loi marginale de Y

Y	1	2
$p_{\bullet j}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = 0.\frac{3}{4} + 1.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad E(X^2) = 0^2.\frac{3}{4} + 1^2.\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$V(X) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} = \sigma_X^2.$$

$E(Y) = 1.\frac{3}{4} + 2.\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $\quad E(Y^2) = 1^2.\frac{3}{4} + 2^2.\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$V(Y) = \frac{7}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} = \sigma_Y^2.$$

$cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y)$

$E(XY) = \Sigma_i \Sigma_j x_i y_j p_{ij} = 0.1.\frac{1}{2} + 0.2.\frac{1}{4} + 1.1.\frac{1}{4} + 1.2.0 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow Cov(X, Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}.\frac{5}{4} = -\frac{1}{16}$ et $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{\frac{1}{16}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{3}{16}}} = -\frac{1}{3}$.

Théorème 4.9

Si $|\rho_{XY}| = 1$, alors il existe une relation fonctionnelle linéaire entre X et Y

Démonstration

Supposons que $\rho_{XY} = 1$

$$\rho_{XY} = 1 = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y} E[(X - EX)(Y - EY)] = E[(\frac{X - EX}{\sigma_X})(\frac{Y - EY}{\sigma_Y})]$$

Posons $\xi = \frac{X - EX}{\sigma_X}$ et $\eta = \frac{Y - EY}{\sigma_Y}$, on peut remarquer que les v. a. ξ et η sont centrées réduites.

$\Rightarrow 1 = E(\xi \eta)$, calculons $V(\xi - \eta) = E((\xi - \eta)^2) = E(\xi^2) + E(\eta^2) - 2E(\xi \eta)$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \xi = \eta$ presque sûrement

$$\Leftrightarrow \frac{X - EX}{\sigma_X} = \frac{Y - EY}{\sigma_Y} \Leftrightarrow Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + (E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X)) = aX + b$$

avec $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ et $b = (E(Y) - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} E(X))$.

Le même raisonnement se fait pour $\rho_{XY} = -1$.

♦

Théorème 4.10

a) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes $\Rightarrow \rho_{XY} = 0$

b) La réciproque n'est pas vraie, sauf si X et Y sont normales.

Démonstration

a) X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$

$$cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[(X - EX)]\, E[(Y - EY)] = 0$$

$\Rightarrow \rho_{XY} = 0$.

b) contre exemple

Soient X et Y 2 v.a. dont la loi jointe est donnée dans le tableau suivant

X \ Y	0	1	4	$p_{i\bullet}$
-2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

-1	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
2	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	**1**

La loi marginale de X

X	-2	-1	0	1	2
$p_{i \bullet}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = -2.\ \frac{1}{4} + -1.\ \frac{1}{8} + 0.\ \frac{1}{4} + 1.\ \frac{1}{8} + 2.\ \frac{1}{4} = 0$

La loi marginale de Y

Y	0	1	4
$p_{\bullet j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = E(XY) = \Sigma_i \Sigma_j x_i y_j\ p_{ij} = 0$

$\Rightarrow \rho_{XY} = 0$, mais

$P(X = 0 \text{ et } Y = 0) = \frac{1}{4}$ et $P(X=0)\ P(Y = 0) = \frac{1}{4} . \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow P(X = 0 \text{ et } Y = 0) \neq P(X = 0)\ P(Y = 0) \Rightarrow$ X et Y ne sont pas indépendantes.

7. LOIS CONDITIONNELLES

Définition 4.11

Soit (X, Y) une variable aléatoire bidimensionnelle

1) discrète, la fonction de probabilité conditionnelle de Y étant donnée X = x est définie par :

$$p(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{p(x,y)}{p(x)} & \text{si } p(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Même chose pour p(x | y).

2) continue, la fonction de densité conditionnelle de Y étant donnée X=x est définie par

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f(x)} & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Même chose pour f(x | y).

Remarque

Si X et Y sont indépendantes, alors

f(y | x) = g(y) (= la densité marginale de Y)

et

f(x | y) = f(x) (= la densité marginale de X).

Exemple 4. 7

On considère le couple (X, Y), où X est revenu annuel du mari et Y est le revenu annuel de la femme en milliers de dirhams.

Y / X	5	10	15	$p_{i\bullet}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$

15	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$
20	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	**1**

Loi de (Y|X = 10)

Y|X= 10	5	10	15
P(Y|X=10)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0

En effet,

$$P(Y = 5 \mid X = 10) = \frac{P(Y = 5 X = 10)}{P(X = 10)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 10 \mid X = 10) = \frac{P(Y = 10 X = 10)}{P(X = 10)} = \frac{2}{3}$$

$$P(Y = 15 \mid X = 10) = \frac{P(Y = 15 X = 10)}{P(X = 10)} = 0.$$

Exemple 4.8

Soit (X, Y) un couple de v.a. dont la densité de probabilité est

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \text{ et } 0 \le y \le x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

<u>la densité marginale de X</u>

$f(x) = \int f(x,y)dy = \int 8xydy$ pour $0 \le x \le 1$

$= 4x^3$ pour $0 \le x \le 1$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{pour } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

<u>la densité marginale de Y</u>

$g(y) = \int f(x,y)dx = \int 8xy\ \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq 1\}}(x)\ dx$ pour $0 \leq y \leq 1$

$= \int 8xy\ \mathbf{1}_{\{0 \leq y \leq 1\}}(x)\ dx$ pour $0 \leq y \leq 1$

$$g(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

<u>f(y |x)</u>

$$f(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{f(x)} & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>f(x | y)</u>

$$f(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{f(x,y)}{g(y)} & \text{si } g(y) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2x}{(1\ \ y^2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 < y \leq x \text{ et } y \neq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut déduire aisément que les v. a. X et Y ne sont pas indépendantes car $f(x, y) \neq f(x)\, g(y)$.